

Problema 1

Coloca una Torre y un Caballo blancos en un tablero de ajedrez vacío de modo que ataquen la cuarta parte de las casillas. Busca la mayor cantidad de soluciones.

Esta propuesta responde a nuestro modelo didáctico de integración profunda entre ajedrez y matemática. Utilizar material concreto como el tablero y las piezas de ajedrez ya es un avance frente a una matemática escolar abstracta de números con los que se hacen cuentas. Pero lo extraordinario del ajedrez es que nos permite crear situaciones problemáticas que reúnen los siguientes requisitos:

1) Son **problemas abiertos**: con la menor cantidad de elementos materiales y consignas relativamente sencillas, permiten una gran cantidad de soluciones alternativas correctas.

2) Tienen **complejidad creciente**: los alumnos pueden encontrar una o más soluciones con su pensamiento lógico concreto, pero la búsqueda de la mayor cantidad de soluciones promueve el desarrollo del pensamiento lógico abstracto.

3) Requieren **distintos niveles de matemática**: los alumnos pueden encontrar soluciones utilizando la matemática operativa elemental (en este caso suma, resta, multiplicación y división de naturales, medios y cuartos), pero para buscar la mayor cantidad de soluciones necesitan una matemática entendida como lógica, como metodología para ordenar el caos. Así podrán construir una economía procedimental que les permita llegar al análisis exhaustivo, para encontrar *todas* las soluciones.

4) Generan **conflictos y debates interpretativos**: la aplicación de las consignas en algunas situaciones concretas requiere actualizar conocimientos ajedrecísticos que ayudarán al niño a comprender más cabalmente las reglas del juego, superando concepciones ingenuas que desarrollan cuando están aprendiendo, como por ejemplo, que tener una pieza propia en una casilla es suficiente para dominarla.

1º Parte: La búsqueda de una solución

¿Cuál es la primera actividad ajedrecístico/aritmética que deben realizar los alumnos?

Deben traducir el enunciado a lenguaje matemático, cuantificar las condiciones del problema y para ello tienen que calcular qué cantidad de casillas constituyen la cuarta parte del tablero. Como el tablero tiene $8 \times 8 = 64$ casillas, la cuarta parte será: $64 \text{ casillas} / 4 = 16 \text{ casillas}$.

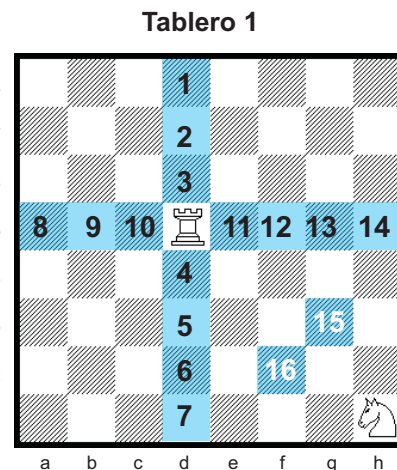
Nuestra experiencia en 4º y 5º grados de primaria demuestra que estos simples cálculos representan un problema para muchos alumnos, lo que no hace más que confirmar su utilidad para diagnosticar dudas y repasar las operaciones de multiplicación y división.

La segunda actividad ajedrecístico/aritmética es calcular cuántas casillas ataca la Torre en un tablero vacío.

Por suerte, en un tablero vacío las Torres siempre atacan 14 casillas, 7 por la columna y 7 por la fila, sin importar dónde estén ubicadas porque todas las columnas y las filas tienen 8 casillas.

La tercera actividad ajedrecístico/aritmética es calcular cuántas casillas tiene que atacar el Caballo mediante la diferencia entre el cuarto y las que ataca la Torre.

El Caballo tiene que atacar: $16 \text{ casillas} - 14 \text{ casillas} = 2 \text{ casillas}$. Como los Caballos en las esquinas sólo pueden atacar 2 casillas, es probable que las primeras soluciones que encuentre los alumnos sean similares a las del **Tablero 1**.



2º Parte: La búsqueda de la mayor cantidad de soluciones

Esta propuesta dispara reflexiones en distintas direcciones que dependen tanto de la intuición y apertura mental de los alumnos (y docentes) que intentan encararlo, como de sus niveles de conocimientos ajedrecísticos y matemáticos previos.

En nuestra presentación seguiremos el orden que recomendamos respetar para orientar la actividad de los alumnos, porque les permitirá descubrir y analizar complejidades crecientes y construir un modelo de razonamiento matemático y ajedrecístico cuya utilidad trasciende largamente la resolución de este problema, además de acostumbrarlos a concentrarse y buscar sistemáticamente la mayor cantidad de opciones antes de tomar decisiones.

Claro que los alumnos pueden elegir caminos diferentes y es nuestra obligación alentar la diversidad de enfoques y no reprimirla, combatiendo la idea de que *“hay una sola forma de hacer las cosas bien”*.

Comenzaremos analizando las distintas posiciones válidas del Caballo cuando la Torre está ubicada en una casilla del centro (**Td4**) y en una esquina (**Ta8**). Aquí surgirán situaciones novedosas que constituyen regularidades en las relaciones entre Torre y Caballo. Ayudaremos a ordenar y clasificar esas regularidades para generar una capacidad anticipatoria en el niño, que le ayude a *“ver”* de un modo diferente las posibilidades de solución del problema en distintas posiciones.

A continuación utilizaremos la simetría para buscar la cantidad mínima suficiente de posiciones de la Torre que generan soluciones originales. Luego nos dedicaremos a encontrar la mayor cantidad de ubicaciones del Caballo en cada una de esas posiciones de la Torre. Y finalmente calcularemos cuántas soluciones totales generan las distintas combinaciones simétricas del Caballo y la Torre.

Soluciones con la Torre en d5. Interacción de superposición.

Aplicando del modo más elemental la noción de simetría, los alumnos razonan que el Caballo ubicado en cualquiera de las 4 esquinas del tablero agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre, que a partir del **Tablero 2** marcaremos con un punto celeste.

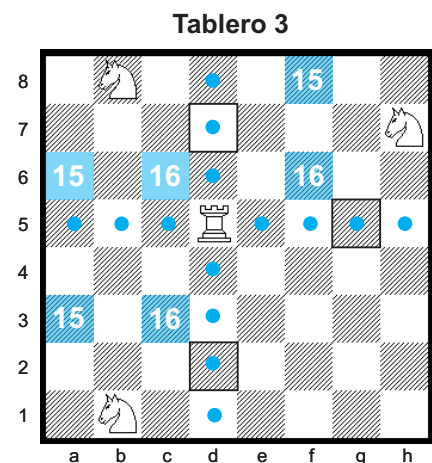
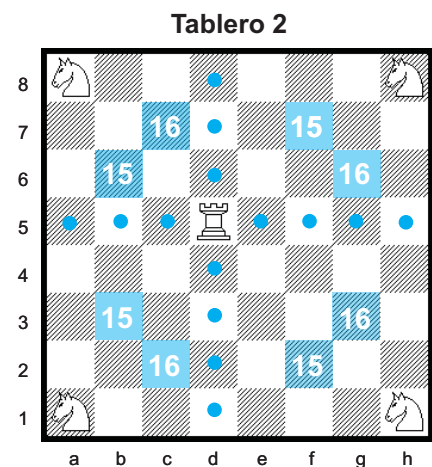
Alguien sin conocimientos de ajedrez puede ingenuamente intentar calcular la cantidad total de soluciones mediante un simple producto: si hay 64 casillas donde colocar la Torre y en cada caso el Caballo puede estar en las 4 esquinas habrá: $64 \times 4 = 256$ soluciones.

Y luego restará 4, porque cuando la Torre esté en cada una de las esquinas el Caballo no podrá colocarse en esa misma casilla, quedando 252 soluciones.

Esta forma de pensar no resiste el análisis de la realidad. Pero antes de estudiar lo que realmente ocurre cuando la Torre está en una esquina exploremos un poco más la posición con la **Td5**.

En el **Tablero 3** vemos 3 situaciones donde los Caballos ubicados en **b1**, **b8** y **h7** atacan 3 casillas cada uno, pero en cada caso, una de esas casillas ya está atacada por la Torre (**d2**, **d7** y **g5** respectivamente). Por eso cada uno de estos Caballos sólo suma 2 casillas nuevas al ataque, completando las 16 casillas atacadas que exige el problema.

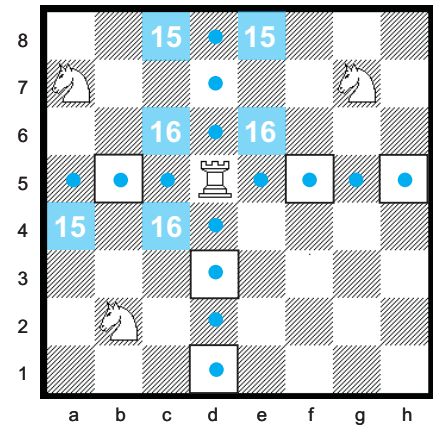
Llamaremos *superposición* a este tipo de interacción que se da cuando la Torre y el Caballo atacan las mismas casillas. Desde el punto de vista del ajedrez es muy importante que los niños aprendan a distinguir estas casillas doblemente atacadas porque allí tendrán ventaja para comer piezas que tengan un solo defensor.



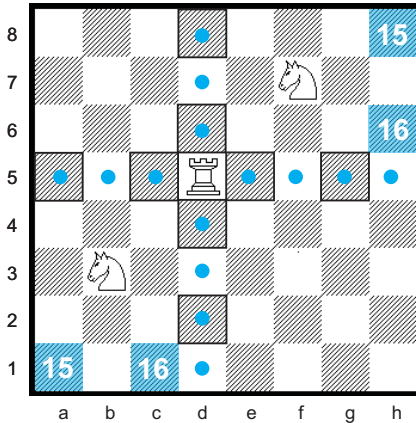
Mirando atentamente encontraremos otras soluciones donde la Torre y el Caballo atacan las mismas casillas.

En el **Tablero 4** vemos otra solución (**Ca7**) donde el Caballo ataca 3 casillas con una superpuesta, pero además aparecen 2 soluciones (**Cb2** y **Cg7**) donde los Caballos atacan 4 casillas cada uno, pero hay *superposición* de 2 casillas por lo que sólo suman 2 casillas nuevas al ataque.

Tablero 4



Tablero 5



Y finalmente en el **Tablero 5** vemos otras 2 soluciones (**Cb3** y **Cf6**) donde los Caballos atacan 6 casillas pero hay *superposición* de 4 casillas por lo que sólo suman 2 casillas nuevas al ataque.

En total, con la Torre en **d5** encontramos 12 posiciones del Caballo que incorporan 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre: 4 sin *superposición* y 8 con *superposiciones* de 1, 2 o 4 casillas.

Soluciones con la Torre en a8. Interacciones de defensa y obstrucción.

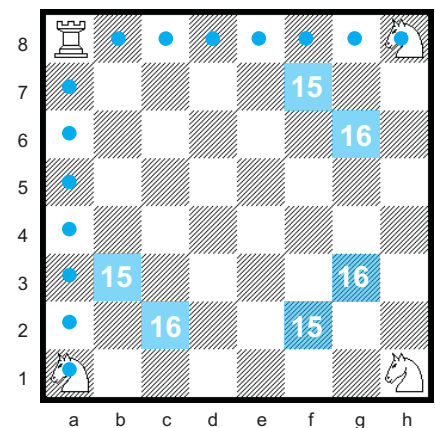
En el **Tablero 7** vemos las 3 soluciones con los Caballos en las esquinas: **Ch1**, **Ca1** y **Ch8**.

La ubicación de los Caballos en **a1** y **h8** provoca un interesante debate entre los alumnos que están aprendiendo a jugar ajedrez.

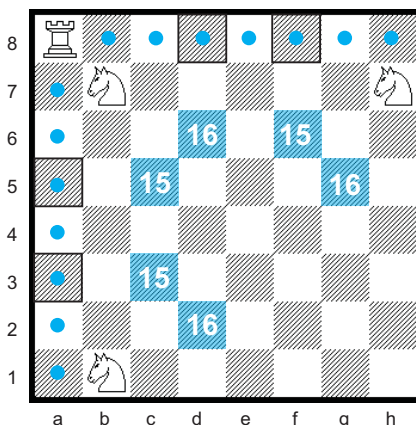
¿Se pueden contar estas casillas que están ocupadas por los Caballos entre las 16 casillas atacadas que dan solución al problema?

Claro que sí, porque la Torre defiende a los Caballos. Esto quiere decir que puede comer a cualquier pieza negra que se coma a los Caballos, igual que puede comer a cualquier pieza negra que mueva a las otras casillas vacías que también está atacando.

Tablero 7



Tablero 8

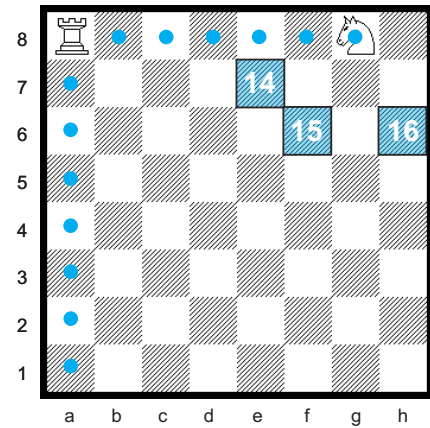


A este segundo tipo de interacción entre el Caballo y la Torre la llamaremos interacción *defensiva*. Más adelante veremos posiciones donde el Caballo es el que defiende a la Torre y entonces la casilla donde está ubicada la Torre pasa a ser una de las 16 casillas que brindan una solución al problema.

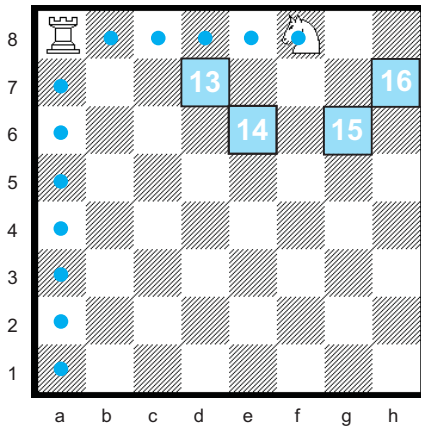
En el **Tablero 8** vemos otras 3 soluciones que presentan *superposición*: los **Cb1** y **Ch7** atacan 3 casillas pero con una *superpuesta* y el **Cb7** ataca 4 casillas pero con 2 *superpuestas*.

En el Tablero 9 vemos un tercer tipo de interacción que llamamos **obstrucción**: el **Cg8** impide que la Torre ataque la casilla **h8**, pero lo compensa atacando tres nuevas casillas (**e7**, **f6** y **h6**). Otra solución simétrica es **Ca2** que obstruye el ataque de la Torre a la casilla **a1** pero lo compensa atacando **b4**, **c3** y **c1**.

Tablero 9



Tablero 10



También vale la solución con obstrucción del **Tablero 10**. El **Cf8** impide que la Torre ataque dos casillas (**g8** y **h8**) pero lo compensa atacando cuatro nuevas casillas (**d7**, **e6**, **g6** y **h7**). Hay una solución simétrica con **Ca3**, que impide que la Torre ataque las casillas **a1** y **a2** pero lo compensa atacando **b5**, **c4**, **c2** y **b1**.

En total, con la Torre en **a8** encontramos 10 soluciones. En 6 el Caballo incorpora 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre: 3 sin superposiciones y 3 con superposiciones de 1 o 2 casillas. En las otras 4, hay obstrucción de 1 o 2 casillas por parte del Caballo, que las compensa atacando 3 o 4 casillas.

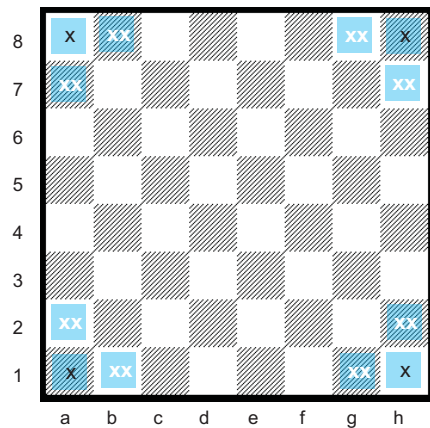
Simetría de las soluciones: posiciones mínimas necesarias de la Torre.

Para calcular cuántas soluciones hay en total no es necesario colocar la Torre en cada una de las 64 casillas del tablero. En el **Tablero 11** se ve cómo usando la simetría se simplifica el cálculo.

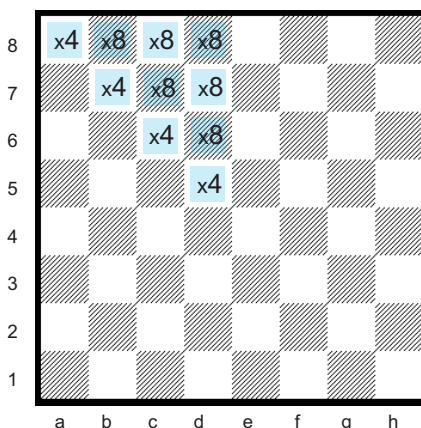
Por una parte, las soluciones con la Torre ubicada en **a8** son congruentes con las soluciones con la Torre ubicada en **a1**, **h1** o **h8**, porque tienen simetría vertical y horizontal.

Por otra parte, las soluciones con la Torre **b8** son congruentes con las soluciones con la Torre en **a7**, **a2**, **b1**, **g8**, **h7**, **g1** o **h2**, porque tienen simetría vertical, horizontal y diagonal.

Tablero 11



Tablero 12



Extendiendo este razonamiento, podemos concluir que las soluciones con la Torre ubicada en las 16 casillas de las dos diagonales mayores tienen 3 réplicas simétricas y las soluciones con la Torre ubicada en las otras 48 casillas del tablero tienen 7 réplicas congruentes.

Por eso sólo necesito calcular las soluciones con la Torre en cada una de las 10 casillas pintadas del **Tablero 12** y realizar las multiplicaciones por 4 o por 8, según corresponda a la cantidad de réplicas simétricas congruentes, como mostramos en el Tablero.

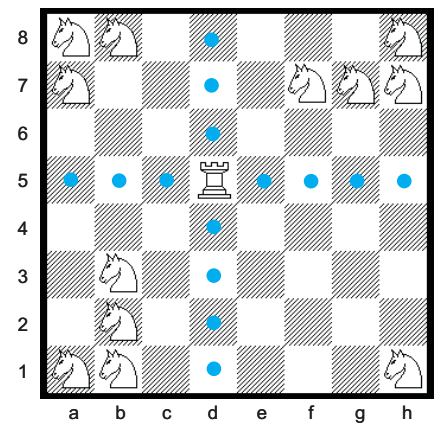
Soluciones con la Torre en el centro

En el **Tablero 13** vemos las 12 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **d5**. En todos los casos, los Caballos aportan 2 casillas a las 14 atacada por la Torre.

Ca1, **Ca8**, **Ch1** y **Ch8** atacan 2 casillas sin ninguna superpuesta; **Ca7**, **Cb1**, **Cb8** y **Ch7** atacan 3 casillas con una superpuesta; **Cb2** y **Cg7** atacan 4 casillas con 2 superpuestas y **Cb3** y **Cf6** atacan 6 casillas con 4 superpuestas.

No encontramos soluciones con interacciones defensivas ni de obstrucción.

Tablero 13



Soluciones con la Torre alrededor del centro

En el **Tablero 14** vemos las 12 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **c6**: en 10 soluciones el Caballo suma 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en 2 soluciones más hay obstrucción.

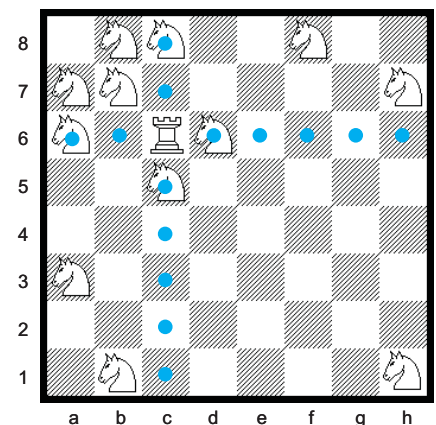
En 4 soluciones, aparecen interacciones defensivas entre la Torre y el Caballo. **Ca7** y **Cb8** atacan 3 casillas: una vacía, una superpuesta y la casilla donde está la Torre, que pasa a estar defendida. **Ca6** y **Cc8**, que atacan 4 casillas con 2 superpuestas, no limitan el ataque de la Torre que defiende a esos Caballos.

Además **Ch1** ataca 2 casillas sin ninguna superpuesta; **Cb1** y **Ch7** atacan 3 casillas con una superpuesta y **Ca3**, **Cf6** y **Cb7** atacan 4 casillas con 2 superpuestas. Y **Cc5** y **Cd6** son dos soluciones simétricas en las que los Caballos obstruyen 4 casillas que dejan de estar atacadas por la Torre pero lo compensan atacando 6.

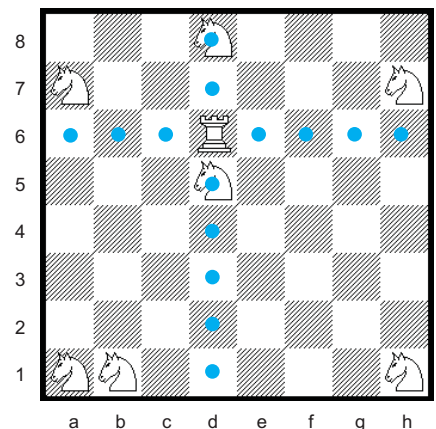
En el **Tablero 15** vemos las 7 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **d6**. En 6 soluciones el Caballo suma 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en una solución más hay obstrucción.

Ca1 y **Ch1** son soluciones sin superposición; **Cb1**, **Ca7** y **Ch7** atacan 3 casillas con una superpuesta y **Cd8** ataca 4 casillas con dos superpuestas. Finalmente, **Cd6** es una solución donde el Caballo obstruye 4 casillas pero lo compensa atacando 6.

Tablero 14



Tablero 15



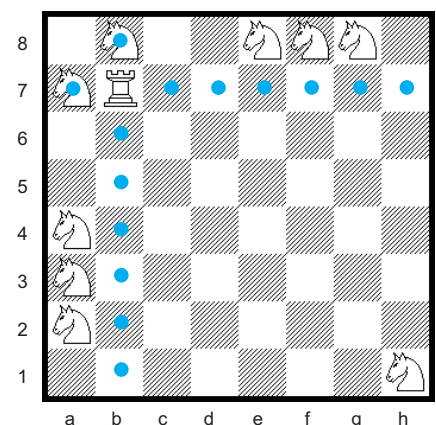
Soluciones con la Torre a una casilla del borde

En el **Tablero 16** vemos las 9 soluciones que encontramos con la Torre en **b7**. En todos los casos, el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre.

Ch1 no tienen ninguna casilla superpuesta; **Cb8**, **Ca7**, **Ca2** y **Cg8** atacan 3 casillas pero con una superpuesta y **Ca3**, **Ca4**, **Cf8** y **Ce8** atacan 4 casillas pero con 2 superpuestas.

Cb8 y **Ca7** tienen interacción defensiva con la Torre, que sigue atacando las casillas donde están ubicados los Caballos. No encontramos ninguna solución con obstrucción.

Tablero 16



Soluciones con la Torre a una casilla del borde (continuación)

En el **Tablero 17** vemos las 10 soluciones que encontramos con la Torre en **c7**. En 8 posiciones el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en 2 soluciones más hay obstrucción.

Ca8 y **Ch1** atacan 2 casillas sin superposición. **Cb1** y **Cg8** atacan 3 casillas pero con una superpuesta. **Ca3**, **Ca4**, **Cc8** y **Cf8** atacan 4 casillas pero con dos superpuestas.

Las dos soluciones con *obstrucción* son: **Cb7** que obstruye una casilla pero ataca 3 y **Cc5** que obstruye 4 casillas pero ataca 6.

En el **Tablero 18** vemos las 10 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **d7**. En 7 posiciones el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en 3 soluciones más hay *obstrucción*.

Ch1 y **Ca1** atacan 2 casillas sin ninguna superpuesta; **Cb1** y **Cg8** atacan 3 casillas pero con una superpuesta; **Cb2** y **Cd1** atacan 4 casillas pero con 2 superpuestas y **Cb5** ataca 6 casillas pero con 4 superpuestas.

Las soluciones con obstrucción son: **Cf7**, que obstruye 2 casillas pero ataca 4; **Ce7**, que obstruye 3 casillas pero ataca 5 y **Cd5**, que obstruye 4 casillas pero ataca 6.

Soluciones con la Torre en el borde

En el **Tablero 19** vemos las 10 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **a8**. En 6 soluciones el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en 4 soluciones más hay obstrucción.

Ca1, **Ch1** y **Ch8** atacan 2 casillas sin superposición. **Cb1** y **Ch7** atacan 3 casillas cada uno pero con una casilla superpuesta. **Cb7** ataca 4 casillas pero con 2 superpuestas.

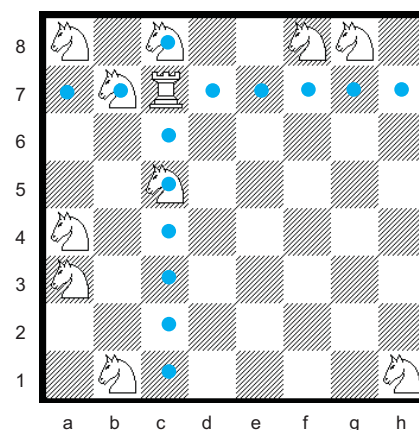
Las soluciones con obstrucción son los pares simétricos **Ca2** y **Cg8**, que limitan una casilla a la Torre pero lo compensan atacando 3 y **Ca3** y **Cf8**, que limitan 2 casillas a la Torre pero lo compensan atacando 4.

En el **Tablero 20** vemos las 10 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **b8**. En 7 posiciones el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en 3 soluciones más hay obstrucción.

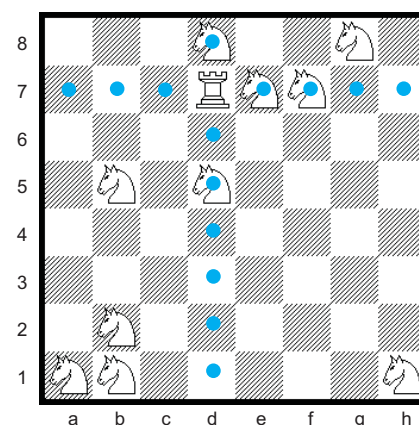
Ch1 y **Ch8** son soluciones sin superposiciones. **Ca2** y **Ch7** atacan 3 casillas pero con una superpuesta. **Ca3**, **Ca4** y **Ca5** atacan 4 casillas pero con dos superpuestas.

Las 3 soluciones con obstrucción son: **Cg8** que obstruye una casilla pero ataca 3; **Cf8** que obstruye 2 casillas pero ataca 4 y **Cb5** que obstruye 4 casilla pero ataca 6.

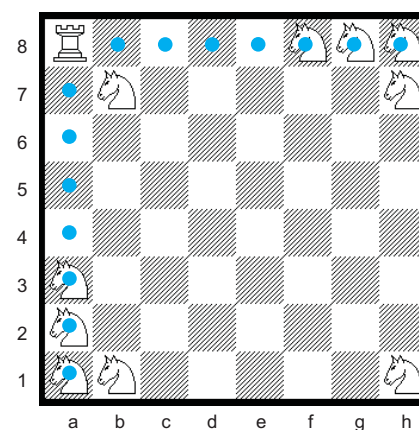
Tablero 17



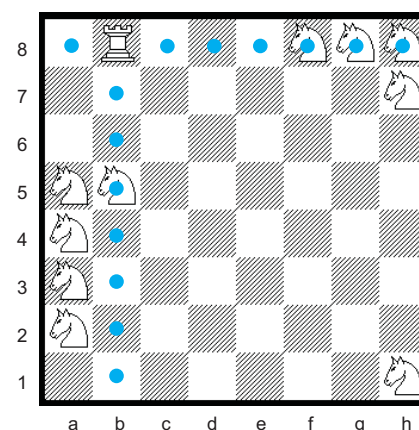
Tablero 18



Tablero 19



Tablero 20



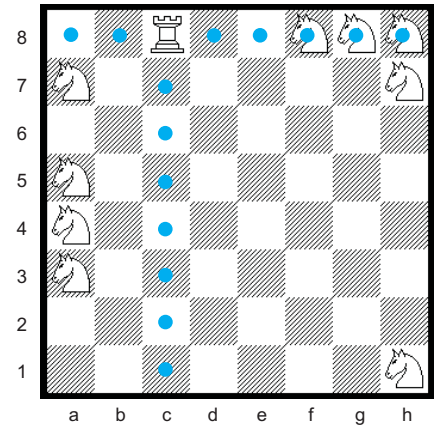
Soluciones con la Torre en el borde (continuación)

En el **Tablero 21** vemos las 9 soluciones que encontramos con la Torre ubicada en **c8**. En 7 soluciones el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en 2 soluciones más hay *obstrucción*.

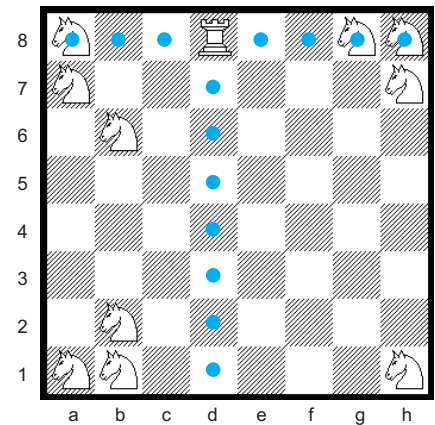
Ch1 y **Ch8** atacan 2 casillas sin ninguna superpuesta. **Ca7** y **Ch7** atacan 3 casillas pero con una superpuesta. **Ca3**, **Ca4** y **Ca5** atacan 4 casillas pero con 2 superpuestas.

Las dos soluciones con obstrucción son: **Cg8** que obstruye una casilla pero ataca 3 y **Cf8** que obstruye 2 casillas pero ataca 4.

Tablero 21



Tablero 22



En el **Tablero 22** vemos las 10 soluciones que encontramos con la Torre en **d8**. En 9 posiciones el Caballo agrega 2 casillas a las 14 atacadas por la Torre y en una solución más hay obstrucción.

Ca1, **Ch1**, **Ca8** y **Ch8** atacan 2 casillas sin ninguna superpuesta; **Ca7**, **Cb1** y **Ch7** atacan 3 casillas pero con 1 superpuesta; **Cb2** ataca 4 casillas pero con 2 superpuestas y **Cb6** ataca 6 casillas pero con 4 superpuestas.

La única solución que encontramos con obstrucción es **Cg8** que obstruye una casilla pero ataca 3.

Total de soluciones

En el **Tablero 23** anotamos la cantidad de soluciones que encontramos en cada una de las 10 casillas propuestas en el Tablero 12 como las posiciones mínimas necesarias de la Torre.

En las casillas simétricas en diagonal del cuadrante inferior, calculamos el total de las soluciones para todas las réplicas congruentes, multiplicando por 4 en el caso de las casillas ubicadas en la diagonal blanca y por 8 en las demás.

Sólo queda sumar esas cantidades, lo que podemos hacer en la forma de tabla que mostramos a continuación y obtendremos el total de soluciones:

Tablero 23

8	10	10	9	10				
7		9	10	10				
6			12	7				
5				12				
4					48			
3					56	48		
2					80	80	36	
1					80	72	80	40
	a	b	c	d	e	f	g	h

En las 4 del centro		48 soluciones
En las 12 que rodean al centro	$56 + 48 =$	104 soluciones
En las 20 a una del borde	$80 + 80 + 36 =$	196 soluciones
En las 28 del borde	$80 + 72 + 80 + 40 =$	272 soluciones
Total en las 64 casillas		<u>620 soluciones</u>

Por supuesto, los invitamos a revisar detenidamente nuestra investigación y si encuentran más soluciones habremos cumplido doblemente nuestro objetivo de provocar el interés por desarrollar el pensamiento lógico - matemático mediante una actividad entretenida.